

DEFINICJA

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**.

Uwaga. Wzór funkcji liniowej możemy również zapisać w postaci $f(x) = ax + b$.

Wykresem funkcji liniowej jest **prosta**. Aby naszkicować wykres funkcji liniowej, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta).

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{5}{3}x - 1$.

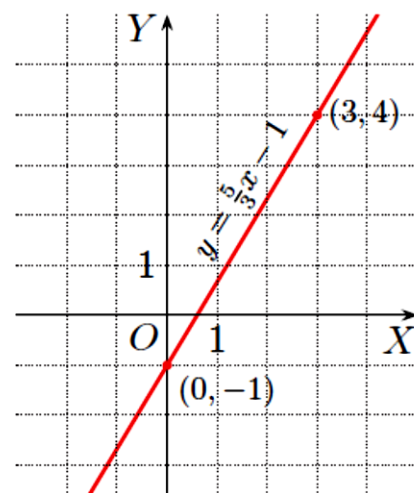
Dla $x = 0$ mamy $y = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$.

Dla $x = 3$ mamy $y = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$.

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

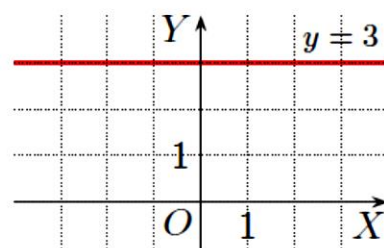
x	0	3
y	-1	4

punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji



Przykład 3

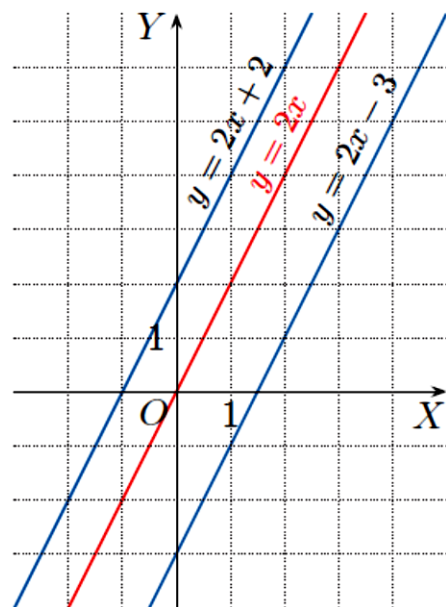
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = 3$. Do prostej będącej wykresem tej funkcji należą wszystkie punkty o współrzędnych $(x, 3)$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Zauważ, że ta prosta jest równoległa do osi OX .



Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji liniowych: $y = 2x$, $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$.

Funkcje te mają ten sam – równy 2 – współczynnik kierunkowy. Proste będące ich wykresami są równoległe. Zauważmy, że prostą $y = 2x + 2$ możemy otrzymać, przesuwając prostą $y = 2x$ o dwie jednostki w górę. Prostą $y = 2x - 3$ możemy otrzymać, przesuwając prostą $y = 2x$ o trzy jednostki w dół.



Ćwiczenie 1

W tym samym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji liniowych: $y = 3x$, $y = 3x + 1$, $y = 3x + 3$ i $y = 3x - 2$.

Wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych: l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , które są równoległe do prostej $y = -\frac{1}{2}x$.

$$l_1: y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad l_2: y = \frac{1}{2}x + 2, \quad l_3: y = -\frac{1}{2}x - 2, \quad l_4: y = -0,5x - 3$$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(3, 5)$ i równoległej do prostej k : $y = 2x - 7$.

Prosta l jest równoległa do prostej k , ma więc ten sam współczynnik kierunkowy równy 2. Zatem l : $y = 2x + b$ dla pewnego $b \in \mathbf{R}$. Podstawiamy do równania współrzędne punktu P : $5 = 2 \cdot 3 + b$ i otrzymujemy $b = -1$. Prosta l ma zatem równanie $y = 2x - 1$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej k . Naskicuj prostą l .

a) $k: y = 2x - 7, P(2, 1)$

c) $k: y = \frac{1}{2}x + 6, P(-2, -5)$

b) $k: y = -3x + 6, P(1, -1)$

d) $k: y = \frac{2}{3}x - \sqrt{2}, P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Przykład 3

Wyznacz punkt przecięcia wykresu funkcji $y = \frac{4}{5}x + 3$ z osią OY .

Jeśli podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś OY .

Zatem $y = \frac{4}{5} \cdot 0 + 3 = 3$, czyli wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY .

a) $y = 5x - 9$

b) $y = -6x + \frac{3}{4}$

c) $y = \frac{2}{3}x + \sqrt{2}$

d) $y = -\sqrt{3}x$

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

3. Wyznacz wzór prostej l , która przechodzi przez punkt P i jest równoległa do prostej k . W jakim punkcie prosta l przecina oś OY ?

a) $k: y = 4x - 2, P(0, 5)$

c) $k: y = -\frac{4}{3}x + 6, P(-6, 5)$

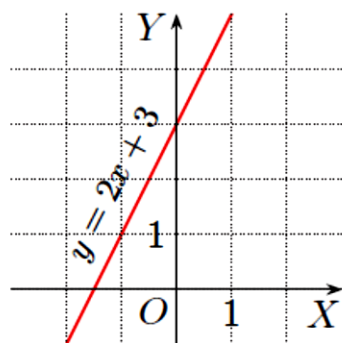
b) $k: y = -3x + 4, P(1, 8)$

d) $k: y = \sqrt{3}x - 3, P(2\sqrt{3}, 6)$

Miejsce zerowe funkcji liniowej

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = 2x + 3$. Jej miejsce zerowe jest równe $-\frac{3}{2}$. Aby je wyznaczyć, rozwiązujemy równanie $2x + 3 = 0$.

Jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$.



Przykład 1

Wyznacz punkty, w których prosta $y = -\frac{1}{2}x + 2$ przecina osie układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tą prostą i osiami układu współrzędnych.

Aby wyznaczyć punkt, w którym prosta przecina oś OX , znajdujemy miejsce zerowe funkcji, której jest wykresem:

$$-\frac{1}{2}x + 2 = 0, \text{ stąd } x = 4$$

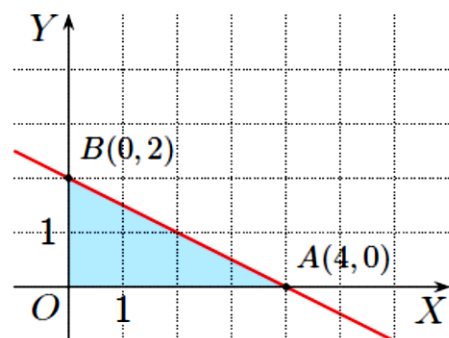
Zatem prosta $y = -\frac{1}{2}x + 2$ przecina:

– oś OX w punkcie $A(4, 0)$,

– oś OY w punkcie $B(0, 2)$.

Szkicujemy prostą $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (rysunek obok).

Pole trójkąta AOB : $P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.



Ćwiczenie 3

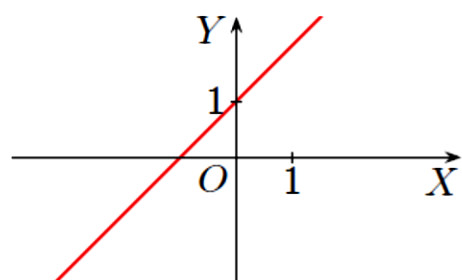
Wyznacz punkty, w których prosta l przecina osie układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tą prostą i osiami układu współrzędnych.

a) $l: y = 2x - 6$

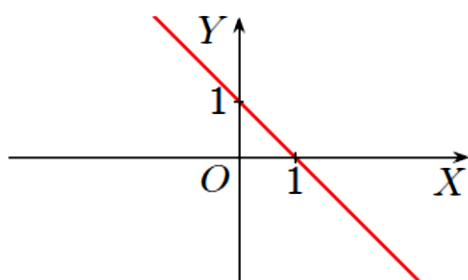
b) $l: y = -\frac{1}{3}x - 2$

c) $l: y = \frac{3}{5}x + 3$

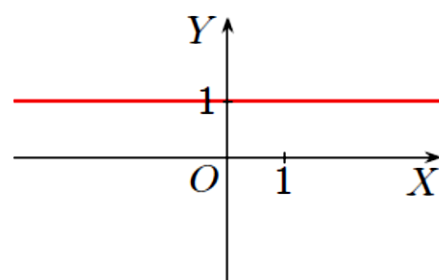
Monotoniczność funkcji liniowej



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stale tę samą wartość.

DEFINICJA

Funkcję f nazywamy:

- **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$,
- **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$,
- **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

Funkcje rosnące, malejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

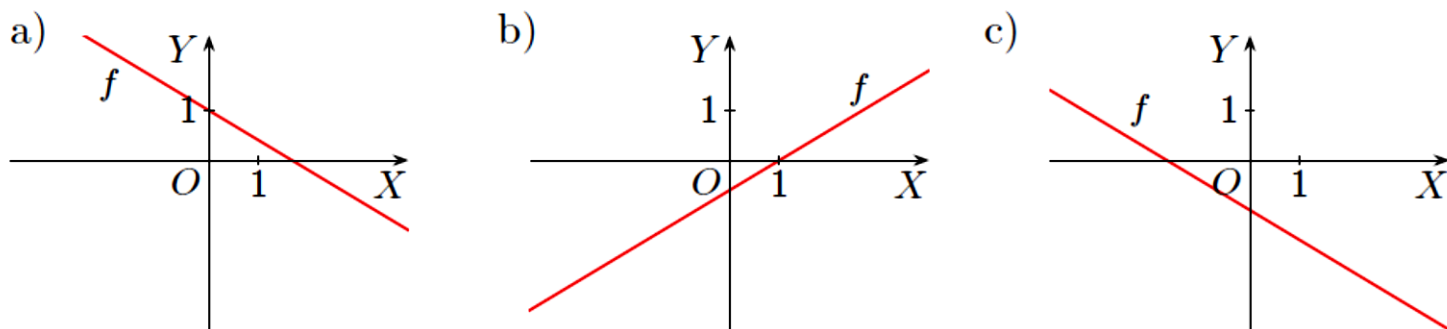
To, czy funkcja liniowa jest rosnąca, malejąca czy stała, zależy od jej współczynnika kierunkowego.

TWIERDZENIE

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest rosnąca dla $a > 0$, malejąca dla $a < 0$, stała dla $a = 0$.

Ćwiczenie 4

Dany jest wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Podaj znaki współczynników a i b .



Ćwiczenie 5

Określ monotoniczność funkcji f .

a) $f(x) = 5x - 12$ b) $f(x) = 8 - 3x$ c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$ d) $f(x) = -3$

ZADANIA

1. Wyznacz punkty, w których prosta przecina osie układu współrzędnych. Naskicuj tę prostą.

a) $y = x + 5$ c) $y = -2x + 4$ e) $y = \frac{3}{2}x - 6$ g) $y = -\frac{3}{4}x + 3$
b) $y = 2x - 4$ d) $y = \frac{1}{2}x - 3$ f) $y = -x + \frac{3}{2}$ h) $y = \frac{2}{5}x - 4$

2. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: f , g i h . Określ monotoniczność każdej z tych funkcji.

a) $f(x) = x - 4$, $g(x) = -\frac{1}{2}x - 4$, $h(x) = -4$
b) $f(x) = -0,5x + 3$, $g(x) = 3$, $h(x) = 0,75x + 3$

3. Podaj miejsce zerowe funkcji oraz zbiór argumentów, dla których przyjmuje ona wartości ujemne.

a) $y = 3x - 6$ b) $y = 6x + 4$ c) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ d) $y = \sqrt{2}x + 4$

Aby wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ należy wstawić ich współrzędne do równania funkcji $y = ax + b$ i rozwiązać układ równań z niewiadomymi a i b , wyznaczając współczynniki funkcji.

Przykład: wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty A(3, -2) i B(-1, 1). Gdy wstawimy współrzędne punktu A do wzoru otrzymujemy równanie $-2 = 3a + b$. Gdy wstawimy do wzoru współrzędne punktu B otrzymujemy $1 = -a + b$. Po rozwiązaniu układu równań:

$$+ \begin{cases} -2 = 3a + b \\ 1 = -a + b. \end{cases}$$

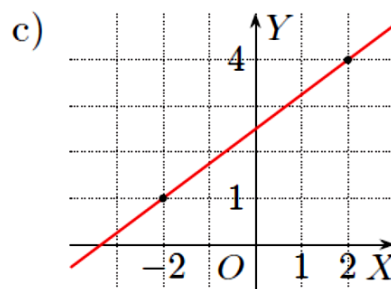
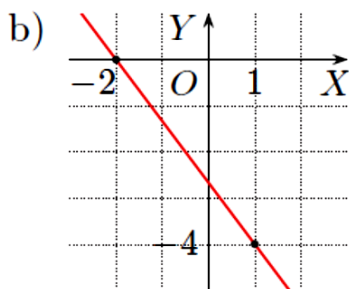
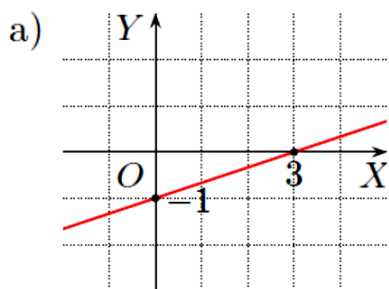
$$-1 = 2a \quad / :2$$

$$a = -0,5$$

Dalej po wyznaczeniu a wstawiamy za a do dowolnego równania układu liczbę $-0,5$, by wyznaczyć b : $1 = -(-0,5) + b$, stąd $1 = 0,5 + b$, a stąd $b = 1 - 0,5$, czyli $b = 0,5$.

Zatem funkcja ma postać $y = -0,5x + 0,5$.

2. Wyznacz równanie prostej przedstawionej na rysunku. Sprawdź, czy punkt $(-10, -5)$ należy do tej prostej.



Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D . Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

a) $C(1, 4), D(3, 6)$

c) $C(-4, 4), D(-2, 3)$

e) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}), D(5, 2)$

b) $C(-3, 4), D(-3, 6)$

d) $C(-5, -3), D(7, -3)$

f) $C(8, -2), D(8, 6)$

6. Naskicuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz punkty, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

a) $2x - y + 2 = 0$

c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

e) $-4(y - \frac{1}{4}x) = 16$

b) $10x + 5y - 5 = 0$

d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$

f) $2(1 - \frac{1}{3}y) - 4x = 0$

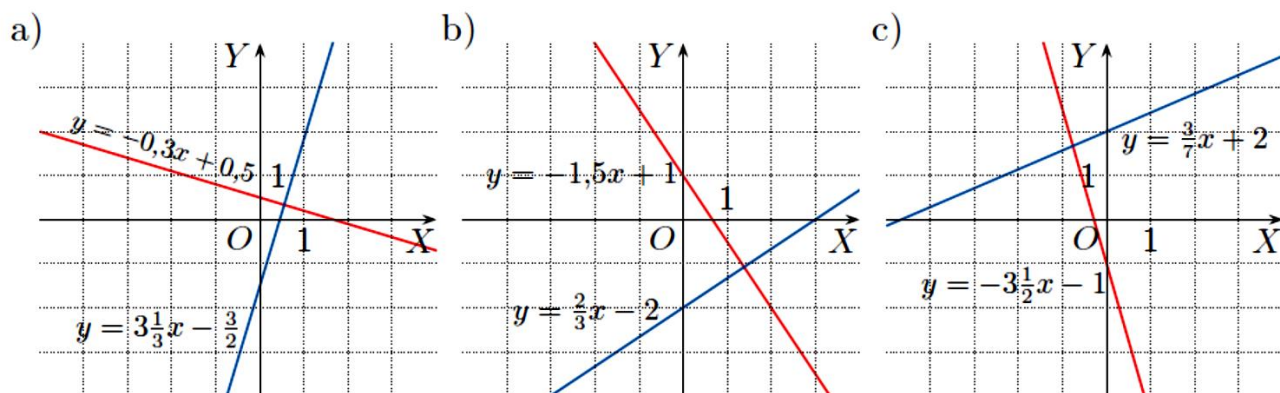
Podpowiedź: wyznaczyć z równania y .

TWIERDZENIE

Proste $y = ax + b$ ($a \neq 0$) i $y = a_1x + b_1$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = -\frac{1}{a}$ (czyli $a \cdot a_1 = -1$).

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.

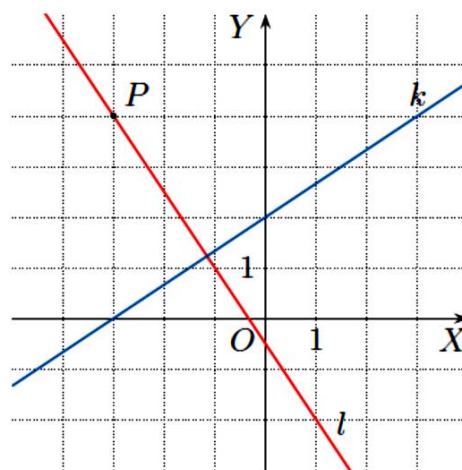


Przykład 2

Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.

Prosta l ma zatem równanie: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.



Ćwiczenie 4

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -3x + 2$, $P(0, -1)$ b) $y = -0,1x$, $P(1, 9)$ c) $y = \frac{3}{7}x + 9$, $P(3, 2)$

8. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .

- a) $f(x) = (m - 3)x + 6$ b) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x$ c) $f(x) = (4 - 2m)x - 7$

2. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .

- a) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$ b) $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$

Zadanie:

- a) Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = (-2m+3)x-2$ i $g(x) = (5m+2)x-9$ są równoległe?
b) Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = (-2m+3)x-2$ i $g(x) = 5x-9$ są prostopadłe?

Przed obowiązkową maturą z matematyki

Test

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

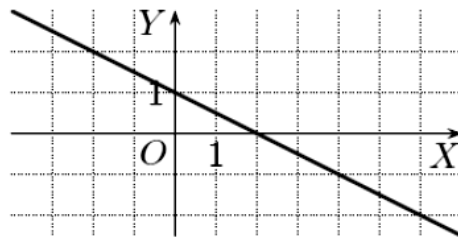
1. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji liniowej o wzorze:

A. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$,

C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$,

B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$,

D. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.



2. Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$?

A. I

B. II

C. III

D. IV

3. Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}x + 4$ jest równe:

A. $-2\sqrt{2}$,

B. $\sqrt{2}$,

C. 2,

D. $2\sqrt{2}$.

4. Prosta przechodząca przez punkt $(-1, 6)$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej 1 przecina oś OY w punkcie:

A. $(0, 3)$,

B. $(0, \frac{3}{2})$,

C. $(0, -3)$,

D. $(0, -6)$.

5. Punkt $A(2k, 7)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 2x + 1$ dla:

A. $k = \frac{2}{3}$,

B. $k = \frac{3}{2}$,

C. $k = \frac{1}{2}$,

D. $k = 7$.

6. Do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{3}{4}x + 6$ nie należy punkt:

A. $(-8, 12)$,

B. $(5\frac{1}{3}, 2)$,

C. $(-16, 15)$,

D. $(-32, 30)$.

7. Proste $y = 3x + 3m$ i $y = (2m + 1)x + 6$ są prostopadłe, gdy:

A. $m = 0$,

B. $m = -1$,

C. $m = -\frac{1}{3}$,

D. $m = -\frac{2}{3}$.

8. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ jest para liczb:

A. $x = 12, y = 8$,

C. $x = 8, y = 12$,

B. $x = -12, y = -8$,

D. $x = 4, y = 4$.

9. Pierwsze równanie układu równań ma postać $2x - 3y = 2$. Układ ten jest sprzeczny, gdy drugim jego równaniem jest:

A. $2x - 4 = 3y$,

C. $x = 3y + 2$,

B. $2x - y = 2$,

D. $x - 1 = 1,5y$.